Rekayasa Sistem Kontrol Optimal Berdasarkan Kriteria Indeks Performansi Kuadratik Menggunakan MATrix LABoratory

Ir. Fiktor Sihombing, MT[1], Ir. Marhiras Sitanggang, M.Sc[2], Zody Chrisna Setiawan Sitompul[3], Martin Luter Simanjuntak[4]
Program Studi Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas HKBP Nommensen, Medan
e-mail : fiktor.sihombing@uhn.ac.id

ABSTRAK

Konsep optimasi sistem kontrol terdiri dari pemilihan indeks kinerja dan desain yang menghasilkan sistem kontrol yang optimal dalam batas yang ditentukan oleh kendala fisik.Dalam memecahkan masalah sistem kontrol optimal, kita mungkin memiliki tujuan untuk menemukan aturan untuk menentukan keputusan kontrol saat ini, tunduk pada kendala tertentu yang akan meminimalkan beberapa ukuran penyimpangan dari perilaku ideal. Ukuran seperti itu biasanya disediakan oleh kriteria optimasi atau indeks kinerja. Kuantitas yang muncul dalam masalah optimasi sistem kontrol adalah variabel keadaan, variabel kontrol, parameter sistem dan kondisi untuk pengendalian keadaan lengkap. Permasalahan dalam sistem kendali optimal berdasarkan indeks kinerja kuadratik adalah menentukan matriks K dari vektor kendali optimal sehingga dapat meminimalkan indeks kinerja.

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)]$$

dimana matriks pembobot S dan Q adalah matriks Hermitian definit positif atau matriks Hermitian semidefinit positif dan R adalah matriks Hermitian definit appositif.

Keywords : State-space, Controllability, Weighting matrices , Riccati equation, Optimal control vector, Quadratic performance index,

ABSTRACT

The concept of control system optimization comprises a selection of a performance index and design which yields the optimal control system within limits imposed by physical constraints. In solving problems of optimal control systems, we may have the goal of finding a rule for the determining the present control decision, subject to certain constraints which will minimize some measure of a deviation from ideal behavior. Such a measure is usually provided by a criterion of optimization or performance index. The quantities appearing in control system optimization problems are state variables, control variables, system parameters and the conditions for complete state controllability. The problem in the optimal control system based on quadratic performance index is determine the matrix K of the optimal control vector so as to minimize the performance index

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)]$$

where the weighting matrices S and Q are positive definite or positive semidefinite Hermitian matrices and R is appositive definite Hermitian matrix.

Keywords : State-space, Controllability, Weighting matrices, Riccati equation, Optimal control vector, Quadratic performance index.

PENDAHULUAN

Persoalan kontrol optimal telah menarik perhatian yang sangat besar pada saat ini, hal itu diakibatkan oleh meningkatnya kebutuhan sistem dengan performansi tinggi. Konsep optimasi sistem kontrol mengkompromikan pemilihan indeks performansi dan rekayasa yang akan menghasilkan sistem kontrol optimal dalam batas-batas kendala fisik

Dalam menyelesaikan sistem kontrol optimal, diinginkan mencari suatu aturan untuk mengambil keputusan sistem kontrol yang akan meminimumkan suatu ukuran simpangan dari perilaku idealnya. Ukuran ini biasanya ditetapkan berdasarkan kriteria optimasi atau indeks performansi yang didefinisikan dengan,

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \quad (1)$$

yang menunjukkan suatu fungsi yang harganya seberapa baik performansi sistem sebenarnya mendekati performansi yang diinginkan. Pada sebagian besar kasus praktis performansi sistem dioptimalkan dengan memilih vektor kontrol sedemikian rupa sehingga indeks performansi diminimumkan.

Pada umumnya persoalan optimasi sistem kontrol sangatlah sulit diselesaikan secara manual, karena suatu sistem kontrol optimal dirumuskan dengan informasi dari persamaan keadaan dan persamaan keluaran sistem, vektor kontrol, kendala persoalan, indeks performansi dan parameter sistem. Untuk penyelesian persoalan kontrol optimal sangatlah dibutuhkan beberapa definisi dan langkah-langkah rekayasa sistem yang optimal. Dengan batuan software pemograman komputer dengan MATrix LABoratory (MATLAB). akan ditunjukkan bagaimana penyelesaian perhitungan definisi-definisi yang telah ditetapkan secara teoritis dan akan ditunjukkan persoalan optimasi tersebut dapat diselesaikan

Tujuan dan Manfaatnya

Sebagai tujuan dan manfaat tulisan ini adalah untuk menunjukkan rekayasa sistem kontrol optimal yang akan menjelaskan bagaimana penyelesaian definisi-definisi rakayasa optimal tersebut dilakukan melalui MATrix LABoratory (MATLAB). dan manfaat tulisan ini adalah dapat lebih membangkitkan semangat dan motivasi setiap yang berminat dalam rekayasa suatu sistem kontrol optimal dan Juga menjadi salah satu kegiatan Tridarma Perguruan Tinggi.

Permasalahan

Permasalahan yang tampak pada persoalan optimasi sistem kontrol adalah menentukan hukum kontrol optimal yang dapat membawa sistem dari keadaan awal yang ditentukan ke keadaan akhir dengan meminimumkan indeks performansi J, Meminimumkan indeks performansi dilakukan dengan memberi bobot Q ke variable keadaan dan bobot R ke masukan sinyal kontrol maka dapat dihasilkan gain K yang optimal.

TINJAUAN PUSTAKA

Berdasarkan konsep persamaan keadaan, suatu sistem linier dapat direkayasa dan dianalisa dengan mengumpan balikkan variable keadaan-variabel keadaannya. Khusus untuk sistem linier time invariant, sistem dapat direkayasa melalui suatu koefisien umpan balik yang konstan, dan sistem non linier dapat didekati dengan sistem linier tersebut antara lain dengan cara linierisasi sepotong-sepotong (piece-wise linearizations).

Cara rekayasa dengan mengumpanbalikkan setiap variable keadaannya dikenal dengan Metode umpanbalik variabel keadaan (State variable feedback). Dengan matode ini dapat direkayasa suatu sistem lup tertutup (closed loop) yang optimal berdasarkan indeks performansi yang berbentuk kwadratik (Quadratic Performaqnce Indeks) yang minimal.

Secara umum, suatu sistem linier, invariant waktu, waktu diskrit dinyatakan dengan persamaan keadaan seperti dinyatakan oleh persamaan (1),

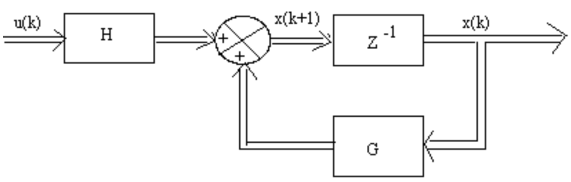
$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \qquad x(0) = c \qquad (1)$$

dimana,

x(k) = variable keadaan (nx1), u(k) = sinyal kontrol (rx1)

G = matriks keadaan (nxn), H = matrik kontrol (nxr)

Dalam bentuk diagram blok, persamaan (1) dapat dibentuk seperti Gambar 1.



Gambar 1. Diagram blok persamaan (1)

Sebagai permasalahan sistem kontrol optimal adalah menentukan gain umpan balik sedemikian, sehingga fungsi kuadratik (indeks performansi) yang menjadi kriteria optimasi yang dianggap dapat menunjukkan seberapa besar performansi sistem sesungguhnya sesuai dengan performansi yang diinginkan.

Untuk rekayasa sistem kontrol optimal diperlukan adanya kriteria optimasi yang dapat meminimumkan hasil pengukuran deviasi perilaku sistem terhadap perilaku idealnya. Pengukuran tersebut dilakukan dengan menentukan indeks performansi yang merupakan fungsi dari suatu harga yang dianggap dapat menunjukkan seberapa besar performansi sistem sesungguhnya sesuai dengan indeks performansi yang diinginkan. Dalam banyak kasus perilaku sistem dioptimasi dengan memilih vektor kontrol u(k), (k=0,1,2,……..N-1) sedemikian sehingga indeks performansi menjadi minimum.

Konsep optimal adalah mengkompromikan pemilihan indeks performansi dengan rekayasa yang akan menghasilkan regulator optimal dalam batas-batas kendala fisik. Dalam rekayasa menentukan hukum kontrol optimal, terlebih dahulu dilakukan pencarian matriks bobot yang pada umumnya dilakukan dengan teknik trial-error (teknik coba-coba).

Regulator optimal adalah suatu regulator yang apabila timbul gangguan pada sistem, maka regulator akan mampu mengembalikan keadaan sistem kontrol ke keadaan semula yaitu sebelum terjadi gangguan dan hal ini dilakukan dalam waktu yang singkat dan dengan menggunakan energi yang minimum pula.

Rekayasa regulator optimal didasarkan terhadap suatu fungsi, dimana fungsi ini menggambarkan fungsi kuadratik dari variable keadaan dan variable sinyal kontrol. Sebagai permasalahan regulator optimal adalah menentukan matriks gain umpan balik sedemikian rupa sehingga fungsi kuadratik (indeks performansi) yang menjadi kriteria optimasi yang dianggap dapat menunjukkan seberapa besar performansi sistem sesungguhnya sesuai dengan performansi yang diinginkan. Dalam banyak kasus perilaku sistem di optimasi dengan memilih vektor kontrol u(k) sedemikian sehingga indeks performansi kuadratik menjadi minimum.

Dalam teori regulator optimal, bahwa kontrol optimal berupa respon transien tidak langsung dapat dilakukan, akan tetapi terlebih dahulu melakukan penentuan harga-harga matriks bobot dari indeks performansi. indeks performansi kuadratik dalam waktu proses tertentu ($0 \leq k \leq N$) adalah,

$$J = \frac{1}{2}x^T(N)Sx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)] \quad (2)$$

Matriks bobot Q, R dan S dipilih sebagai pembobot yang menentukan seberapa besar indeks performansi system dipengaruhi variable keadaan x(k), (k = 0,1,2 ..….,N-1), vektor kontrol u(k), (k= 0,1,2, …..N-1) dan harga keadaan akhir x(N) secara berurutan. Matriks Q mempengaruhi vector keadaan x(k), matriks R mempengaruhi vkctor kontrol u(k) dan matriks S mempengaruhi keadaan akhir x(N). Matriks Q dan R adalah matriks simetrik, $Q \geq 0$ dan $R > 0$ funsi hara J pada persamaan (2) adalah ekspektasi dari suatu fungsi kuadrat variable keadaan dengan bobot matris Q dan variable kontrol dengan bobot matriks R. Fungsi J mempunyai dimensi daya dan arti fisis dari fungsi ini adalah seberapa besar daya yang harus diberikan untuk melakukan pengontrolan dengan kinerja tertentu. Permasalahan regulator optimal adalah $\frac{Min \quad J}{\{u(k\}}$ atau dengan kata lain, menentukan u(k) sedemikian sehingga J minimum.

Dinamika sistem yang dinyatakan (1) dalam teori kontrol optimal harus memenuhi syarat minimum yaitu matriks plant G dan matriks sinyal kontrol H harus terkontrol sepenuhnya dengan demikian berlaku hokum kontrol optimal yang menghasilkan gain K_{opt}. Terkontrol diartikan bahwa dengan menggunakan vektor kontrol sistem dengan seluruh variable keadaannya dapat dibawa dari keadaan awal ke keadaan akhir yang diinginkan dalam waktu yang berhingga dan dengan masukan (input) yang berhingga pula. Maka sistem tersebut dikatakan terkontrol jika dan hanya jika rank dari matriks keterkontrolan M = n, atau untuk menguji kestabilan matriks $G-HK_{opt}$ perlu dipenuhi persyaratan,

$$M = [H : GH: G^2H \ldots..G^{n-1}H] = n \quad (3)$$

Sebelum dilakukan rekayasa regulator optimal untuk suatu sistem kontrol, harus dilakukan pengujian keterkontrolan terlebih dahulu, apabila sistem tidak terkontrol, maka rerkayasa regulator optimal tidak akan memberikan solusi unik. Apabila sistem terkontrol, maka rekayasa regulator optimal dapat dilakukan. Dinamika sistem kontrol dengan model persamaan (1), apabila sistem terkontrol, semua variable keadaan x(k) dapat diukur, maka akan ada hukum kontrol optimal,

$u(k) = -K_{opt}(k)\ x(k)$ (4)

dimana,

$K_{opt}(k)$ = Matriks umpan balik (*r x n*)

Matriks K_{opt} pada persamaan (4) merupakan matriks penguatan optimal (rxn) sesuai dengan pembobotan yang digunakan. Jika k = N, K_{opt} akan menjadi matriks rxn yang tetap dalam hal ini K_{opt} akan menjadi hasil akhir dari indeks performansi kwadratik dengan kata lain sinyal control optimal ditentukan oleh K_{opt}.

Harga gain umpan balik keadaan optimal K_{opt} adalah,

$K_{opt}(k) = R^{-1}H^{T}(G^{T})^{-1}[P(k) - Q]$ (5)

Jika indeks performansi J persamaan (2) dihubungkan dengan persamaan (5) akan diperoleh persamaan Riccati persamaan (6),

$P(k) = Q + G^{T}P(k+1)[I+HR^{-1}H^{T}P(k+1)]^{-1}$ (6)

P(k) adalah matriks definit positif sebagai solusi dari persamaan Riccati dan Q matriks bobot variable keadaan bersifat definit positif dan R matriks bobot sinyal kontrol bersifat definit positif.

Kondisi batas P(k) dinyatakan oleh persamaan (7) untuk k = N

$P(N) = S$ (7)

Sesuai persamaan (4) dicari variable keadaan x(k). Sesudah memperoleh Gain optimal dengan persamaan (5) dan mensubsitusikannya ke persamaan (1) maka dapat dihitung persamaan (8)

$x(k+1)=(G-H^{T}K_{opt}(k))^{T}\ x(k)$

(8)

Maka dengan persamaan (4) akan diperoleh sinyal kontrol optimal, nilai minimum indeks performansi J dapat dihitung,

$$J_{min} = \frac{1}{2}x^{T}(N)Sx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^{T}(k)P(k)x(k) - x^{T}(k+1)P(k+1)x(k+1))]$$

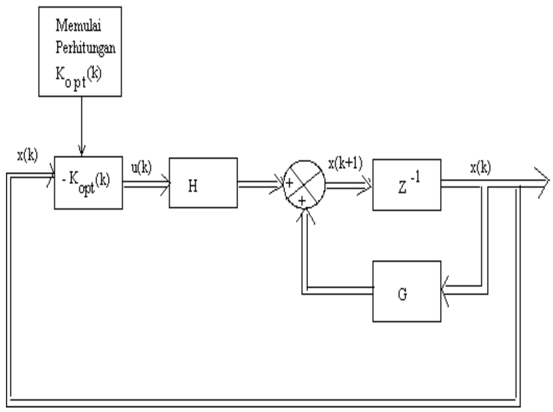
$$= \frac{1}{2}x^{T}(N)Sx(N) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[x^{T}(0)P(0)x(0) - x^{T}(1)P(1)x(1) + \cdots .x^{T}(N)P(N)x(N)]$$

$$= \tfrac{1}{2}x^{T}(N)Sx(N) + \tfrac{1}{2}x^{T}(0)P(0)x(0) - \tfrac{1}{2}x^{T}(N)Sx(N)$$

Dengan kondisi batas persamaan (7) maka,

$$J_{min} = \tfrac{1}{2}\ x^{T}(0)P(0)\mathrm{x}(0) \qquad (9)$$

Diagram blok sistem kontrol optimal dapat digambarkan seperti Gambar 2.



Gambar 2. Diagram blok sistem kontrol optimal

METODE PENELITIAN

Untuk melakukan rekayasa sistem kontrol yang optimal dilakukan dengan Metode Regulator Optimal. Metode ini dituangkan dengan membentuk program komputer dengan MATrix LABoratory (MATLAB). Tahapan-tahapan metode regulator optimal adalah : Menentukan dinamika sistem dalam bentuk persamaan keadaan seperti persamaan (1) dan periksa keterkendaliannya dengan persamaan (3). Kemudian tentukan bobot S, Q, R tertentu pada indeks performansi yang akan diminimumkan yaitu persamaan (2). Tentukan matriks I pada persamaan Riccati yaitu persamaan (6) kemudian dicari matriks solusi

Riccati dengan waktu proses terbatas (N terbatas). Selanjutnya dicari gain umpan balik K(k) yang optimal (K_{opt}(k)) dengan persamaan (5). variable keadaan x(k) pada persamaan (8). maka hukum kontrol optimal dapat ditentukan persamaan (4).

HASIL dan ANALISIS

Persyaratan awal yang harus dipenuhi dalam rekayasa sistem kontrol optimal adalah diketahuinya model dinamika sistem yang dikontrol dalam konsep persamaan keadaan. Dengan diketahuinya model sistem tersebut maka parameter sistem dapat dideskripsikan secara eksak. Parameter sistem merupakan kendala yang harus diperhatikan dalam menentukan spesifikasi rekayasa, parameter sistem menentukan apakah sistem tersebut linier, non linier, varian, invariant terhadap waktu, terkontrol atau tidak terkontrol.

Pada penelitian ini didefinisikan suatu dinamika sistem dalam bentuk persamaan keadaan seperti persamaan (1),

x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)

Atau dinyatakan dengan,

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k),$$

Kondisi awal = $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, Dalam hal ini, $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Akan ditentukan sinyal kontrol optimal yang akan meminimumkan indeks performansi,

$$J = \frac{1}{2} x^T(8) S x(8) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{7} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)]$$

Tahap–tahap penyelesaian dengan MATrix LABoratory (MATLAB) menggunakan teoritis Regulator Optimal .

Tahap 1.

Seperti telah dijelaskan di atas, bahwa persyaratan yang harus dipenuhi agar sistem lup tertutup selalu stabil adalah sistem dinamiknya harus terkontrol. Hal ini dapat di cek dengan, persamaan (8) atau dengan program,

[ctr]=ctrb(G, H)

[ctr]=rank(ctr)

Hasilnya adalah,

$$ctr = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ctr = 2 (sama dengan orde system orde 2)

Penjelasan : karena rank adalah sama dengan orde sistem maka sistem dinyatakan terkontrol.

Tahap 2.

Menentukan matriks pembobotan. Matriks bobot ini hanya sebagai contoh saja dan dapat dirobah atau disesuaikan dan N dalam pembahasan ini = 8

Dalam hal ini ditentukan matriks bobot variabel keadaan $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks bobot sinyal kontrol R = [1]

Matriks bobot $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, Matriks $I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tahap 3.

Menghitung Matriks solusi Riccati P(k) dengan persamaan (6) atau dalam program :

Dengan mempedomani Persamaan (7) maka;

$$P = S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C1= num2str (N) = 8, C2= strcat('P(',C1,')=')

for k=N:-1:1, P=[P11(k+1) P12(k+1), P21(k+1) P22(k+1)]

= P(8) = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Seterusnya untuk menentukan matriks solusi Riccati P untuk k = 7,6,5,4,3,2,1,0 dilakukan sebagai berikut ;

Pn=Q+G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G

P11(k)=Pn(1,1), P12(k)=Pn(1,2)

P11 = [3.7913 3.7911 3.7905 3.7877 3.7740 3.7097 3.4286 2.5000 1.0000]

P12 = [1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]

P21(k)=Pn(2,1), P22(k)=Pn(2,2)

P21= [1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]

P22= [1.7913 1.7913 1.7911 1.7905 1.7877 1.7742 1.7143 1.5000 1.0000]

C1=num2str(k-1)=7,C2=strcat('P(',C1,')='),C2=P(7)

Maka matriks solusi riccati untuk k =7,

P(7) = $\begin{bmatrix} 2.5000 & 0.5000 \\ 0.5000 & 1.5000 \end{bmatrix}$

Pn=Q+G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G

P11(k)=Pn(1,1), P12(k)=Pn(1,2)

P11= [3.7913 3.7911 3.7905 3.7877 3.7740 3.7097 3.4286 2.5000 1.0000]

P12= [1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]

P21(k)=Pn(2,1), P22(k)=Pn(2,2)

P21= 1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0
P22= 1.7913 1.7913 1.7911 1.7905
1.7877 1.7742 1.7143 1.5000 1.0000
C1 =6, C2 =P(6)
Maka matriks solusi riccati untuk k =6,

$$P(6) = \begin{bmatrix} 3.4286 & 0.8571 \\ 0.8571 & 1.7143 \end{bmatrix}$$

Pn=Q+G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G
P11(k)=Pn(1,1), P12(k)=Pn(1,2)
P11 = [3.7913 3.7911 3.7905 3.7877
3.7740 3.7097 3.4286 2.5000 1.0000]
P12 = [1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P21(k)=Pn(2,1), P22(k)=Pn(2,2)
P21 = [1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P22 = [1.7913 1.7913 1.7911 1.7905
1.7877 1.7742 1.7143 1.5000 1.0000]
C1 =5, C2 =P(5)
Maka matriks solusi riccati untuk k =5

$$\mathbf{P(5)} = \begin{bmatrix} 3.7097 & 0.9677 \\ 0.9677 & 1.7742 \end{bmatrix}$$

Pn=Q+G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G
P11(k)=Pn(1,1), P12(k)=Pn(1,2)
P11 =[3.7913 3.7911 3.7905 3.7877
3.7740 3.7097 3.4286 2.5000 1.0000]
P12 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P21(k)=Pn(2,1), P22(k)=Pn(2,2)
P21 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P22 =[1.7913 1.7913 1.7911 1.7905
1.7877 1.7742 1.7143 1.5000 1.0000]
C1 =4, C2 =P(4)
Maka matriks solusi riccati untuk k =4,

$$P(4)= \begin{bmatrix} 3.7740 & 0.9932 \\ 0.9932 & 1.7877 \end{bmatrix}$$

Pn=Q+G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G
P11(k)=Pn(1,1), P12(k)=Pn(1,2)
P11 =[3.7913 3.7911 3.7905 3.7877
3.7740 3.7097 3.4286 2.5000 1.0000]
P12 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P21(k)=Pn(2,1), P22(k)=Pn(2,2)
P21 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P22 =[1.7913 1.7913 1.7911 1.7905
1.7877 1.7742 1.7143 1.5000 1.0000]
C1 =3, C2 =P(3)
Maka matriks solusi riccati untuk k =3,

$$\mathbf{P(3)}= \begin{bmatrix} 3.7877 & 0.9986 \\ 0.9986 & 1.7905 \end{bmatrix}$$

Pn=Q+G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G
P11(k)=Pn(1,1), P12(k)=Pn(1,2)
P11 =[3.7913 3.7911 3.7905 3.787 7
3.7740 3.7097 3.4286 2.5000 1.0000]
P12 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P21(k)=Pn(2,1), P22(k)=Pn(2,2)
P21 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P22 =[1.7913 1.7913 1.7911 1.7905
1.7877 1.7742 1.7143 1.5000 1.0000]
C1 =2, C2 =P(2)
Maka matriks solusi riccati untuk k =2,

$$\mathbf{P(2)}= \begin{bmatrix} 3.7905 & 0.9997 \\ 0.9997 & 1.7911 \end{bmatrix}$$

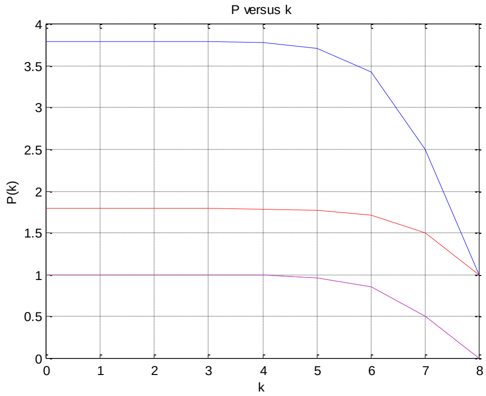
Pn=Q+G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G
P11(k)=Pn(1,1), P12(k)=Pn(1,2)
P11 =[3.7913 3.7911 3.7905 3.7877
3.7740 3.7097 3.4286 2.5000 1.0000]
P12 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P21(k)=Pn(2,1), P22(k)=Pn(2,2)
P21 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P22 =[1.7913 1.7913 1.7911 1.7905
1.7877 1.7742 1.7143 1.5000 1.0000]
C1 =1, C2 =P(1)
Maka matriks solusi riccati untuk k =1,

$$\mathbf{P(1)}= \begin{bmatrix} 3.7911 & 0.9999 \\ 0.9999 & 1.7913 \end{bmatrix}$$

Pn=Q+G'*P*inv(I+H*inv(R)*H'*P)*G
P11(k)=Pn(1,1), P12(k)=Pn(1,2)
P11 =[3.7913 3.7911 3.7905 3.7877
3.7740 3.7097 3.4286 2.5000 1.0000]
P12 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P21(k)=Pn(2,1), P22(k)=Pn(2,2)
P21 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986
0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
P22 =[1.7913 1.7913 1.7911 1.7905
1.7877 1.7742 1.7143 1.5000 1.0000]
C1 =0, C2 =P(0)
Maka matriks solusi riccati untuk k =0,

$$P(0)= \begin{bmatrix} 3.7913 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.7913 \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh hubungan nilai matriks solusi Riccati P dengan k, ditunjukkan dengan figure plot (k,P11,'b',k,P12,'g',k,P21,'m',k,P22,'r'); grid; xlabel('k'); ylabel ('P(k)'); title('P versus k') seperti Gambar 3



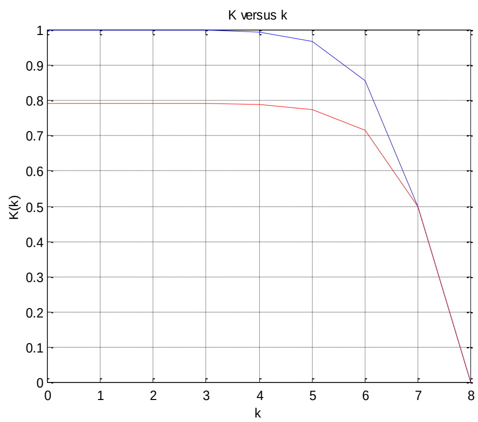
Gambar 3. Nilai P versus k

Tahap 4.

Menghitung Gain K_{opt} dengan persamaan (5), maka akan ditentukan hubungan nilai K(k) dengan k untuk k= 0,1, 2,3,4,5,6,7,8 sebagai berikut;

for k=1:1:(N+1),
P=[P11(k) P12(k)P21(k) P22(k)]
Maka dengan memakai persamaan (5)
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1=num2str(k-1), C1 =0,
C2=strcat('K(',C1,')='), C2 =K(0)
K(0)= [1.0000 0.7913]
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1 =1, C2 =K(1)
K(1) = [0.9999 0.7913]
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1 =2, C2 =K(2)
K(2) = [0.9997 0.7911]
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1 =3, C2 =K(3)
K(3) = [0.9986 0.7905]
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1 =4, C2 =K(4)
K(4) = [0.9932 0.7877]
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1 =5, C2 =K(5)
K(5) = [0.9677 0.7742]
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1 =6, C2 =K(6)
K(6) = [0.8571 0.7143]
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1 =7, C2 =K(7)
K(7) = [0.5000 0.5000]
K=inv(R)*H'*inv(G')*(P-Q)
K1(k)=K(1), K2(k)=K(2)
K1 =[1.0000 0.9999 0.9997 0.9986 0.9932 0.9677 0.8571 0.5000 0]
K2 =[0.7913 0.7913 0.7911 0.7905 0.7877 0.7742 0.7143 0.5000 0]
C1 =8, C2 =K(8)
K(8) = [0 0]

Untuk memperoleh hubungan nilai K(k) dengan k untuk k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8 dilakukan dengan; figure ; plot(k,K1,'b',k,K2,'r');grid; xlabel('k');ylabel('K(k)');title('Kversus k');seperti ditunjukkan Gambar 4

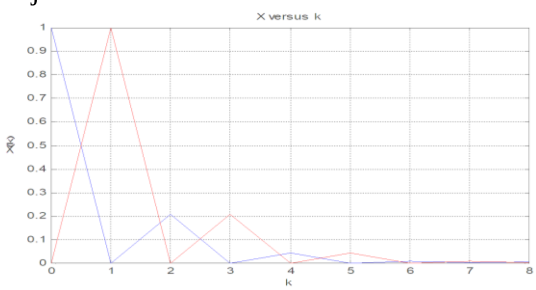


Gambar 4. Nilai K versus k

Tahap 5.

Menghitung Variable keadaan x dengan persamaan (8), atau dengan program,
for k=1:1:N,
K=[K1(k) K2(k)] X=[X1(k)X2(k)]
Xn=(G-H*K)*X
X1(k+1)=Xn(1) X2(k+1)=Xn(2)
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1=num2str(k) C2=strcat('X(',C1,')=') C2 =X(0)= $\begin{bmatrix}1.0000\\0\end{bmatrix}$
Xn=(G-H*K)*X
X1(1)=X0(1)X2(1)=X0(2)
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1=num2str(0) C2=strcat('X(',C1,')=')C1 =1
C2 =X(1)= $\begin{bmatrix}0.0000\\1.0000\end{bmatrix}$
Xn=(G-H*K)*X
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1 =2 , C2 =X(2) = $\begin{bmatrix}0.2087\\0.0000\end{bmatrix}$
Xn=(G-H*K)*X
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1 =3, C2 =X(3)= $\begin{bmatrix}0.0001\\0.2087\end{bmatrix}$
Xn=(G-H*K)*X
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1 =4, C2 =X(4) = $\begin{bmatrix}0.0437\\0.0001\end{bmatrix}$
Xn=(G-H*K)*X
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1 =5, C2 =X(5) = $\begin{bmatrix}0.0003\\0.0437\end{bmatrix}$
Xn=(G-H*K)*X
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1 =6, C2 =X(6) = $\begin{bmatrix}0.0099\\0.0003\end{bmatrix}$
Xn=(G-H*K)*X
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1 =7, C2 =X(7) = $\begin{bmatrix}0.0015\\0.0099\end{bmatrix}$
Xn=(G-H*K)*X
X1 =[1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015 0.0057]
X2 =[0 1.0000 0.0000 0.2087 0.0001 0.0437 0.0003 0.0099 0.0015]
C1 =8, C2 =X(8)= $\begin{bmatrix}0.0057\\0.0015\end{bmatrix}$

Untuk memperoleh hubungan nilai x(k) dengan k untuk k = 0,1,2,3,4,5,6,7,8 dilakukan dengan figure ; plot(k,X1,'b',k,X2,'r');grid; xlabel('k');ylabel('X(k)');title('X versus k') ditunjukkan Gambar 5



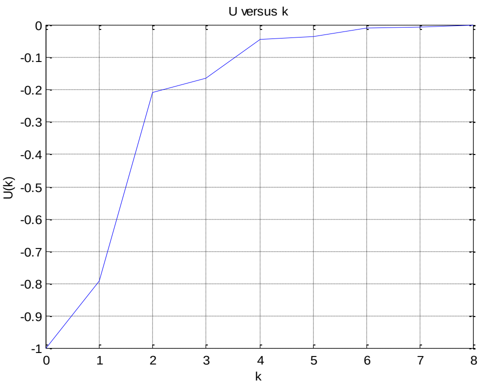
Gambar 5. Nilai x versus k

Tahap 6.

Menghitung sinyal kontrol u(k) dengan persamaan (4), for k=1:1:(N+1), K=[K1(k) K2(k)],
X=[X1(k), X2(k)]
U(k)=-K*X
C1=num2str(k-1), C2=strcat('U(',C1,')=');

U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =0, C2 =U(0) = -1.0000
U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =1, C2 =U(1) = -0.7913
U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =2, C2 =U(2)
U(2)= -0.2087
U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =3, C2 =U(3) = -0.1651
U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =4, C2 =U(4) = -0.0435
U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =5, C2 =U(5) = -0.0342
U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =6, C2 =U(6) = -0.0087
U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =7, C2 =U(7) = -0.0057
U =-1.0000 -0.7913 -0.2087 -0.1651 -0.0435 -0.0342 -0.0087 -0.0057 0
C1 =8, C2 =U(8) = 0

Untuk memperoleh hubungan nilai x(k) dengan k dilakukan dengan : figure; plot(k,U,'b');grid; xlabel('k');ylabel('U(k)');title('U versus k') seperti ditunjukkan Gambar. 6



Gambar 6. Nilai U versus k

Tahap 7.
Sesuai dengan persamaan (9) bahwa indeks performansi minimum akan diperoleh pada matriks solusi Riccati P pada k=0 atau P(0). Maka Jmin = 0.5*[X0'*P0*X0]

KESIMPULAN

Kinerja dari sistem kontrol optimal berdasarkan Indeks Performansi Kuadratik ditentukan oleh pemilihan matriks bobot Q dan R. Bila mariks bobot variable keadaan Q dibuat besar berarti *strategi optimal waktu* lebih dipentingkan, sedangkan bila matriks bobot variable kontrol R dibuat besar, berarti *strategi optimal energi* lebih dipentingkan. Indeks Performansi minimum diperoleh pada

$X(0) = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan matriks solusi Riccati $P(0)= \begin{bmatrix} 3.7913 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.7913 \end{bmatrix}$ yaitu

$J_{minimum} = 1.8956$

DAFTAR PUSTAKA

[1] Bahram Shahian, *Control System Design Using Matlab*, Prentice -Hall International Editions, London, 1993

[2] E.J. davison, *on Pole Assignment in linear system with Incomplate state feedback*. IEEE Transaction on Automatic Control

[3] Fallside and H. Seraji. *Direct Design Procedure for Multivariabel: Feedback Systems*. Prosedinggs IEE

[4] Fiktor Sihombing *"Buku Ajar Sistem Kontrol Dasar-dasar Teori Analisis dan Disain"*

[5] Katsuhiko Ogata *" Discrete Time Control Systems"* . Prentice Hall International. Inc

[6] Katsuhiko Ogata *" Modern Control Enggineering"* Second Edition. Prentice Hall International. Inc

[7] Roland S. Burns, 2001, *Advanced Control Engineering*, Butterworth-Heinemann,